Kac-Moody Lie環とMacdonald Typeの恒等式について (リー環,代数群とその周辺)

小池, 和彦

数理解析研究所講究録
394巻 1980年 1-21

Kac-Moody Lie環と Macdonald type の恒等式について

東大 理　小池 和彦

以下 この稿の目的は 最近 話題にな,ている Kac-Moody Lie環の定義とその性質を紹介し,更に 形式的巾級数環の中で 無限積と無限和とを結びつける恒等式 "Weyl-Macdonald-Kac formula" を Kac-Moody Lie環の表現論を用いて証明する, Moody, Kac, Lepowsky 等の方法を紹介することである。その為に まず 有限次元半単純Lie環の復習から始める。

§0 有限次元半単純Lie環の復習

$\mathfrak{g}$を複素数体$\mathbb{C}$上の有限次元半単純Lie環,$\mathfrak{h}$をそのCartan部分環,CをそのCartan行列とすると $\mathfrak{g}$は次の様な良い性質を持,ていた。

1°) (分類定理)

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$を 複素数体上の単純Lie環, C, C'を対応する

Cartan 行列とすると

$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}' \iff$ 置換行列 P が存在して $P^{-1}CP = C'$

2°) (Root space への分解)

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ (Δ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルート系)

今 $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ に辞書式順序を導入し $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}\subset\Delta$ をこの順序に関する simple root system とすると

3°) (構造定理)

$\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ の基底 e_i, $i=1,2,\cdots,l$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ の基底 f_i, $i=1,2,\cdots,l$ $\mathfrak{h}$ の基底 h_i $i=1,2,\cdots,l$ を 適当にとれば, $e_1,e_2,\cdots,e_l, h_1,\cdots,h_l$ $f_1,\cdots,f_l$ は $\mathfrak{g}$ の生成元で 次の基本関係を持つ。

$$(0.1)\begin{cases} [h_i, h_j]=0 \quad [h_i, e_j] = C_{ij}\, e_j,\ [h_i, f_j] = -C_{ij} f_j \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i,\ (\mathrm{ad}\, e_i)^{-C_{ij}+1}(e_j)=0 \quad (i\neq j) \\ (\mathrm{ad} f_i)^{-C_{ij}+1}(f_j)=0 \quad (i\neq j) \end{cases}$$

但し $C=(C_{ij})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 行列である。

さらに 半単純Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現論については 次の様な綺麗な定理が成立していた。

P を dominant integral weight の集合, 即ち

$$P := \left\{\lambda\in(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^* \ ;\ \frac{2(\alpha_i,\lambda)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\in\mathbb{Z},\ \frac{2(\alpha_i,\lambda)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\geqq 0 \ \forall i=1,2,\cdots,l\right\}$$

とすると

4°) (Elie Cartan の定理)

$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の同値類は P の元と 1:1 onto に

対応する。

この対応は (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の既約表現とし $V=\bigoplus_{\lambda\in(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*} V_\lambda$ を V の weight space 分解, 即ち $V_\lambda=\{v\in V\ ;\ \rho(h)v=\lambda(h)v,\ \forall h\in\mathfrak{h}\}$ とすると (ρ, V) に対して その highest weight を対応させることにより与えられる。

5°) (Weyl の character formula)

(ρ, V) を dominant integral weight $\mu\in P$ に対応する $\mathfrak{g}$ の既約表現とし その formal character χ_μ を

$$\chi_\mu := \sum_{\lambda:\, V\text{の weight}} m_\lambda e^\lambda \qquad m_\lambda \text{は weight } \lambda \text{ の重複度}$$

と定義すると

$$(0.2)\qquad e^{-\mu}\chi_\mu = \frac{N(\mu)}{D}$$

但し D, $N(\mu)$ は W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群, ρ を正ルートの和の半分, 即ち $\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ とすると

$$D := \sum_{w\in W}(\det w)\, e^{w\rho-\rho}$$

$$N(\mu) := \sum_{w\in W}(\det w)\, e^{w(\mu+\rho)-(\mu+\rho)}$$

で与えられる。

さらに 上の character formula の分母 D は 次の様な積表示を持っていた。

6°) (Weyl の分母公式)

$$(0,3)\quad D=\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w\rho-\rho}=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})$$

この式で $\rho-w\rho$ は，$\Phi_w:=\{\alpha\in\Delta^+\,;\,w^{-1}(\alpha)\in\Delta^-\}=\Delta^+\cap w\Delta^-$ と 定義し Φ_w の元の和を $\langle\Phi_w\rangle$ と書くと
$\rho-w\rho=\langle\Phi_w\rangle$ で与えられる。即ち，

$$(0,3)'\quad D=\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{-\langle\Phi_w\rangle}=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})$$

§1 Kac-Moody Lie環と そのルート系及びWeyl群の定義

Kac-Moody Lie環の定義は §0の構造定理が出発点になる。その前にまず Cartan 行列の持つ性質を幾つか抽出した一般型Cartan行列(以下 G.C.Mと略記)を定義しておく。

定義

ℓ 次正方行列 $C=(C_{ij})_{1\leq i,j\leq \ell}$ が G.C.Mであるとは次の4条件を満す時云う。

1) $C_{ij}\in\mathbb{Z}$ $i,j=1,2,\dots,\ell$ 2) $C_{ii}=2$ $i=1,2,\dots,\ell$

3) $C_{ij}\leqq 0$ $\forall i\neq j$ 4) $C_{ij}=0\Longleftrightarrow C_{ji}=0$ $\forall i\neq j$

§0 の構造定理に於て Cartan 行列の代りに G.C.M を用いて 生成元と基本関係により Lie 環Lを定義した時，正確には Lは少し変更する必要があるが，Lは最早 有限

次元ではないが，にもかかわらず うまい L-moduleをとってくれば §0 の 4°), 5°), 6°) の定理が成立するというのが Kac の重要な発見であった。(Kac [3])

特に G.C.Mの中でも Euclidean type (後で定義を与える。)と 呼ばれるものについて Weylの分母公式を書き下したものが Dedekind η-関数の n乗(nは単純Lie環の次元)の展開を与える Macdonaldの恒等式になるというのが 以下紹介する話の筋道である。(Macdonald の恒等式のmysterious term の意味を Kac-Moody Lie環を用いて見事に解釈したのは Moody [8]である。)

まず Kac-Moody Lie環の正確な定義から与えよう。

G.C.M $C=(C_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,\ell}$が与えられた時，$\mathbb{C}$上のLie環 $L_1(C)$を 3ℓ 個の生成元 $e_1,e_2,\cdots,e_\ell, h_1,\cdots,h_\ell, f_1,\cdots,f_\ell$と基本関係(0.1) により定義する。(但し (0.1)の基本関係で Cartan行列の代りに G.C.M Cを用いる。)

今 $L_1(C)$の元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に対して 記号 $(x_1,x_2,\cdots,x_\ell)$ を $(x_1,x_2,\cdots,x_\ell):=\mathrm{ad}\,x_1\,\mathrm{ad}\,x_2\cdots\mathrm{ad}\,x_{n-1}\,x_n=[x_1[x_2[\cdots[x_{n-1}\,x_n]\cdots]$

により 定義し $L_1(C)$の部分空間 $\ell_1(n_1,n_2,\cdots,n_\ell)$を

i) $n_1\geq 0,\ n_2\geq 0,\ \cdots,\ n_\ell\geq 0$ $(n_1,\cdots,n_\ell)\neq(0,0,\cdots,0)$の時

$$\ell_1(n_1,n_2,\cdots,n_\ell):=\sum_{\substack{(e_{i_1},\cdots e_{i_s})\text{中}\\ e_j\text{が}n_j\text{個出現}}}\mathbb{C}(e_{i_1},\cdots,e_{i_s})$$

ii) $n_1 \leqq 0, n_2 \leqq 0, \cdots, n_\ell \leqq 0$ $(n_1, n_2, \cdots, n_\ell) \neq (0, 0, \cdots, 0)$の時

$$l_1(n_1, n_2, \cdots, n_\ell) := \sum_{\substack{(f_{i_1}, \cdots f_{i_s})\text{中} \\ f_j\text{が}-n_j\text{個出現}}} \mathbb{C}(f_{i_1}, \cdots f_{i_s})$$

iii) $n_1 = n_2 = \cdots = n_\ell = 0$ の時

$$l_1(0, \cdots, 0) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{C} h_i \quad (= \mathfrak{f} \text{とおく。})$$

iv) 上の i) ii) iii) 以外の時

$$l(n_1, n_2, \cdots n_\ell) = 0$$

と 定義すると $L_1(C)$ は

$L_1(C) = \mathfrak{f} \oplus \sum_{(n_1, n_2, \cdots, n_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell} l_1(n_1, n_2, \cdots n_\ell)$ という直和分解を許し

$\mathbb{Z}^\ell$ graded ring になる。(この事実は 有限次元の場合のルートの同符号性と対応している。)

さらに $L_1(C)$ 中の Ideal の集合Mを

$M = \{\mathfrak{a} \subset L_1(C) ; \mathfrak{a}$ は $L_1(C)$ の homogeneous Ideal で $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{f} = \{0\}\}$

と 定義すると Mには 包含関係に関して最大元が一意的に存在する。それを $\mathfrak{R}$ とすると

<u>定義</u>

$L(C) := L_1(C)/\mathfrak{R}$ を Kac-Moody Lie 環と云う。

注意 この $\mathfrak{R}$ は $\{0\}$ ではないかという予想を Kac がしているが 未だ 証明も反例もない。

最初の G.C.M Cが分解可能のとき, 即ち 置換行列Pが存在して $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ となるとき, A, B もG.C.Mで

$L(C) \underset{\text{同型}}{\cong} L(A) \times L(B)$ が成立する。よって以下 既約な G.C.M についてのみ考えればよい。

$L=L(C)$を G.C.M C から構成された Kac-Moody Lie 環とする。

$\mathfrak{R}$は homogeneous ideal より Lも graded ring になり

$$L = \mathfrak{h} \oplus \sum_{(n_1 \cdots n_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell} \ell(n_1, \cdots, n_\ell)$$ と云う直和分解が成立する。

L 上にルート系, 及び Weyl 群を 定義しよう。

まず ルート系については 有限次元との類似を追えば simple root $\alpha_i \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ $i=1,2,\cdots,\ell$ を $\alpha_i(h_j) := C_{ji}$, $\forall j=1,2,\cdots,\ell$ により定義し ルート系Δを $\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i$ 但し $\ell(n_1, \cdots, n_\ell) \neq 0\}$ により定義したいのだが G.C.M Cが $\det C=0$ の場合も有り得るので simple root の持つ重要な性質 "$\mathbb{C}$上一次独立" が 崩れてしまう。そこで 次の様な technique で ここを乗り切る。

Lの微分全体のなす Lie 環を $\mathrm{Der}(L)$で示すとき D_i $i=1,2,\cdots,\ell$ という Lの微分を

$$D_i x = n_i x \quad \text{for } \forall x \in \ell(n_1, \cdots, n_\ell)$$

により 定義し $D_1, \cdots, D_\ell$ により生成される $\mathrm{Der}(L)$の部分 Lie 環を $\mathfrak{D}_0$ で表す。さらに Lie 環 $L^{e\prime}$ を

$$(L^e)' = \mathfrak{D}_0 \oplus L \quad \text{(Lie 環の半直積)}$$
$$(\mathfrak{h}^e)' = \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{h}$$

により 定義し $\alpha_i' \in ((\mathfrak{h}^e)')^*$ $i=1,2,\cdots \ell$ を

$$\mathrm{ad}\,h\cdot e_i = \alpha_i'(h)\,e_i \qquad \text{for } {}^\forall h\in(\mathfrak{h}^e)'$$

で 定義すると $\mathrm{ad}\,D_j\cdot e_i = D_j\cdot e_i = \delta_{ij}e_i = \alpha_i'(D_j)e_i$ より $\alpha_i'(D_j)=\delta_{ij}$ $i,j=1,2,\dots,l$ となり $\alpha_1',\dots,\alpha_l'$ は一次独立になる。そこで $\mathfrak{D}_0$ の部分空間 $\mathfrak{D}$ で $\alpha_1'|_{\mathfrak{D}\oplus\mathfrak{h}},\dots\alpha_l'|_{\mathfrak{D}\oplus\mathfrak{h}}$ が 一次独立になる様な極小の部分空間 $\mathfrak{D}$ をとり固定する。

$$L^e := \mathfrak{D}\oplus L \qquad \mathfrak{h}^e := \mathfrak{D}\oplus\mathfrak{h}$$

と 定義し $\alpha_i'|_{\mathfrak{h}^e}=\alpha_i\in(\mathfrak{h}^e)^*$ と おけば $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ は定義から $\mathbb{C}$ 上一次独立になる。$\alpha_1,\dots,\alpha_l\in(\mathfrak{h}^e)^*$ を L の simple root と定義し L のルート系 Δ を

$$\Delta := \{\alpha\in(\mathfrak{h}^e)^*;\ \alpha=\sum_{i=1}^{l}n_i\alpha_i \quad \ell(n_1,\dots n_l)\neq 0\}$$

により 定義する。

この時 有限次元の場合と同様に ルート空間分解

$$L^e = \mathfrak{h}^e\oplus\sum_{\alpha\in\Delta}L^\alpha \qquad \text{但し } L^\alpha=\{x\in L^e;\ \mathrm{ad}\,h\,x=\alpha(h)x$$
$$\text{for } {}^\forall h\in\mathfrak{h}\}$$

が 成立する。更に $n_1\geqq 0,\dots,n_l\geqq 0$ $(n_1,\dots n_l)\neq(0,\dots,0)$ のとき $\sum n_i\alpha_i$ を 正ルート，$n_1\leqq 0,\dots n_l\leqq 0$ $(n_1,\dots n_l)\neq(0,\dots 0)$ のとき $\sum n_i\alpha_i$ を 負ルートと呼ぶと

$$\Delta = \Delta^+\cup\Delta^- \quad ,\ -\Delta^+ = \Delta^-$$

が 成立する。(ここで Δ^+ は正ルートの集合，Δ^- は負ルートの集合)

ルートの定義が 終えたので Weyl群の定義に入る。

$(\mathfrak{g}^e)^*$ の ℓ 次元部分空間 V を $V:=\sum_{i=1}^{\ell}\mathbb{C}\alpha_i$ により定義する。そこで Weyl群 $W\subset GL(V)$ を

$$W=\langle w_i\rangle_{i=1,2,\cdots,\ell}$$ 但し $w_i\in GL(V)$ は

$w_i(\alpha_j):=\alpha_j-\alpha_j(h_i)\alpha_i=\alpha_j-C_{ij}\alpha_i \quad \forall j=1,2,\cdots,\ell$ で与えられる, によって定義する。

この時 $w_i^2=\mathrm{Id}$ 及び $W\Delta=\Delta$, $\dim L^{\alpha}=\dim L^{w(\alpha)}$ $\forall w\in W$, が成立することが $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現論からわかる。

さらに $\forall w\in W$ に対して

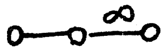
$$\Phi_w=\{\alpha\in\Delta^+;\ w^{-1}(\alpha)\in\Delta^-\}=\Delta^+\cap w(\Delta^-)$$

と定義すると w の $w_1,\cdots,w_\ell$ に関する長さ $\ell(w)$ について $\ell(w)=\#|\Phi_w|$ が成立し W が二元消去律を満し従って Coxeter群になることが有限次元半単純Lie環の場合と同様に証明できる。その $w_1,\cdots w_\ell$ に関する基本関係を書いてやると

$$w_i^2=1 \quad i=1,2,\cdots,\ell \qquad (w_iw_j)^{m_{ij}}=1 \quad (m_{ij}<\infty)$$

但し m_{ij} は i) $C_{ij}C_{ji}=0$ の時 $m_{ij}=2$ ii) $C_{ij}C_{ji}=1$ の時 $m_{ij}=3$ iii) $C_{ij}C_{ji}=2$ の時 $m_{ij}=4$ iv) $C_{ij}C_{ji}=3$ の時 $m_{ij}=6$ v) $C_{ij}C_{ji}\geqq 4$ の時 $m_{ij}=\infty$ で与えられる。

例えば G.C.M $\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}$ の Weyl群の Coxeter図形は



となり $SL(2,\mathbb{Z})$ を Index 2 で含む Coxeter群になる。

最後に もう一つ定義として simple root の W-orbit $W\alpha_1 \cup W\alpha_2 \cup \cdots \cup W\alpha_\ell =: \Delta_R$ とおき これを real root と云う。さらに $\Delta_I := \Delta - \Delta_R$ と定義し Δ_I の各元を imaginary root と云う。$\dim L^\phi = \dim L^{w\phi}$ より $\Delta_R \ni {}^\forall\phi$ に対して $\dim L^\phi = 1$ が 成立する。

§2 Euclidean Lie 環

以下 この節では Kac-Moody Lie 環の中でも重要な class である Euclidean Lie 環について述べる。

実際 今のところ Kac-Moody Lie 環の中でも root 系及び その multiplicity が計算されているのは この Euclidean Lie 環だけで この場合に Weyl の分母公式に相当する式が Macdonald の恒等式なのである。

この節では 考える Kac-Moody Lie 環は 全て既約な G.C.M から 構成したものとする。

定義

Kac-Moody Lie 環 L が 中心に含まれない non trivial Ideal を持つ時 L を Euclidean Lie 環と云い 元の G.C.M C も Euclidean type と云う。

Euclidean Lie 環については Moody が その精密な構

造を 求めている。それを 定理の形で述べると

定理（Moody [6] [7]）

既約なG.C.M Cが与えられたとき

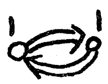
Cが Euclidean type $\Longleftrightarrow$ $A := 2I - C$ とおくと

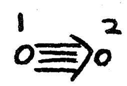
Aの固有値半径$\sigma(A) = 2$

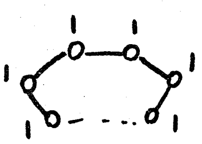
但し Aの固有値半径$\sigma(A)$ は $\sigma(A) := \max\limits_{\alpha\text{はAの固有値}} |\alpha|$ で定義する。

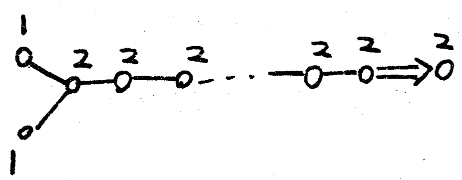
注意 上の行列Aは Cが既約なG.C.MよりFrobenius行列になっている。

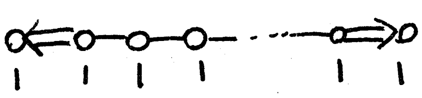
特に上の定理から $\det C = 0$，かつ $\forall i = 1, 2, \cdots, l$ に対して Cから i行i列を除いてできる行列C_iは 有限次元半単純Lie環のCartan行列になることがわかる。従って Euclidean typeのG.C.MをDynkin diagramで書いてやると 次の表が得られる。

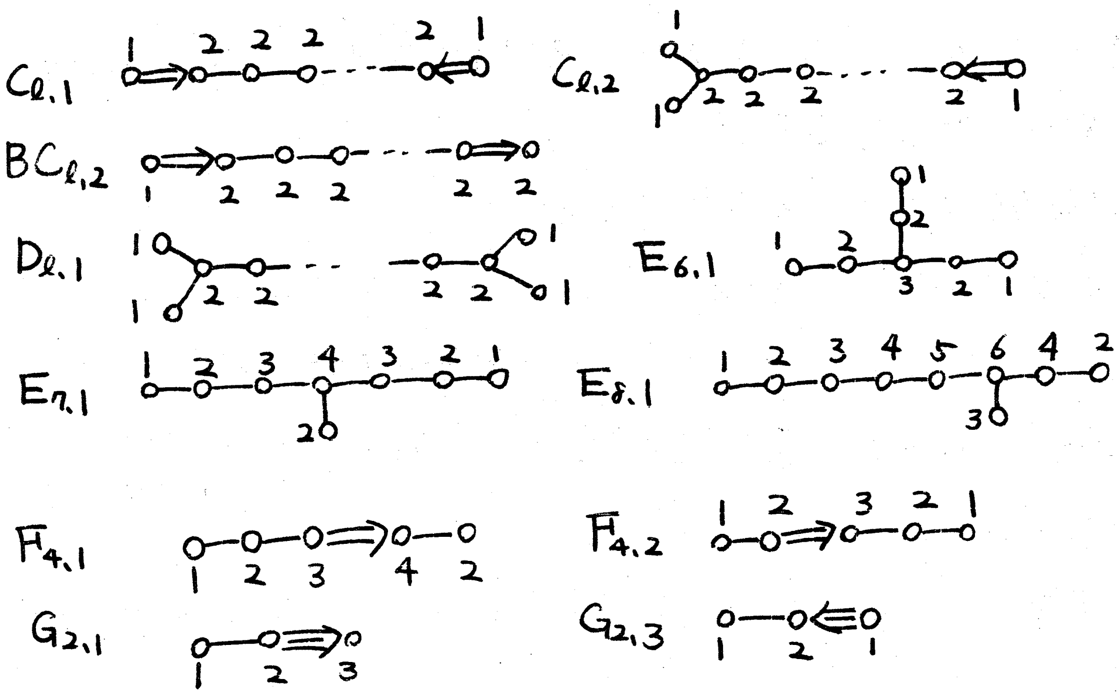
$A_{1,1}$  G.C.M $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ，

$A_{1,2}$  G.C.M $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A_{l,1}$ $l \geqq 2$ 

$B_{l,1}$ $l \geqq 3$ 

$B_{l,2}$ $l \geqq 2$ 



上の表で label $X_{\ell,r}$ (例えば $A_{\ell,1}$, $B_{\ell,2}$ etc) の図形は頂点数が $\ell+1$ 個, 従って size が $\ell+1$ 次の G.C.M に対応している。また r は tier number と呼ばれているもので少し後で定義を与える。

各図形に書き込まれている数 $\xi=(n_0,n_1,\dots,n_\ell)$ は対応する G.C.M を C とすると Frobenius 行列 $A:=2I-C$ の固有値2に対応する固有vectorである。(Frobenius 行列の議論より この様な $\xi=(n_0,n_1,\dots,n_\ell)$ は $1=\min_{i=0,1,\dots,\ell} n_i$ という条件の下で一意的に定まる(ref 岩堀 [1])。)

この時 Moodyにより次の定理が示されている。但し ξ に対応する $(\mathfrak{h}^e)^*$ の元も同じ ξ で表すことにする。

定理 (Moody)

Lが Euclidean Lie環の時, その imaginary root Δ_Iは

$\Delta_I = \mathbb{Z}\xi$ で与えられる。従って $\Delta = \Delta_R \cup \mathbb{Z}\xi$。

そこで tier number rを

$$r := \min\{n \in \mathbb{N} ; n\xi + \Delta = \Delta\}$$

により定義する。この時 rは 1, 2, 3 何れかの値をとる。さらに Euclidean Lie環の場合には imaginary rootの重複度まで Moodyにより求められている。

定理の形で述べると次の通りである。

定理 (Moody [ ])

Lを Euclidean Lie環とする。その時

i) $k \neq 0$, $k+nr \neq 0$ を満す任意の整数の組(k,n)に対して $\dim L^{k\xi} = \dim L^{(k+nr)\xi}$

ii) $\dim L^{r\xi} = l$

(但し 上のlは Dynkin図形の表の $X_{l,r}$ (e.g. $A_{l,1}$, $B_{l,2}$, $F_{l,2}$ etc) のlである。即ち このとき Lを定義する G.C.Mの sizeは $l+1$次である。)

上の定理より tier number 2以上のEuclidean Lie環Lに対して $\dim L^{k\xi}$, 但しkは $1 \le k < r$を満す自然数, を求めてやればよい。

各場合について書いてやると次の通りである。

L	$\dim L^{\mathfrak{z}}$
$A_{1,2}$	1
$B_{\ell,2}$	1
$C_{\ell,2}$	$\ell-1$

L	$\dim L^{\mathfrak{z}}$	$\dim L^{2\mathfrak{z}}$
$BC_{\ell,2}$	ℓ	
$F_{4,2}$	2	
$G_{2,3}$	1	1

実は Euclidean Lie 環については ルート系及びその重複度のみならず その構造まで求められている。

特に tier number 1 の Euclidean Lie 環 $X_{\ell,1}$ は 1次元の中心 $\mathfrak{z}$ を持ち $X_{\ell,1}/\mathfrak{z}$ は X_ℓ 型の単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に Laurant polynomial ring $\mathbb{C}[t,\frac{1}{t}]$ を tensor した Lie 環と同型になる。即ち

$$0 \to \mathfrak{z} \to X_{\ell,1} \to \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t,\tfrac{1}{t}] \to 0 \quad (\text{exact})$$

例えば

$$A_{\ell,1}/\mathfrak{z} \cong \mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t,\tfrac{1}{t}] = \mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C}[t,\tfrac{1}{t}])$$

$$B_{\ell,1}/\mathfrak{z} \cong \mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t,\tfrac{1}{t}] = \mathfrak{o}(2\ell+1,\mathbb{C}[t,\tfrac{1}{t}])$$

etc.

が成立する。

§3 Kac-Moody Lie 環の表現論と Macdonald の恒等式.

有限次元半単純 Lie 環の表現論との類似を Kac-Moody Lie 環に於ても成立させる為に ここでもうまい表現の class をとってくる必要がある。そこで L^e module V $(\dim V \leqq \infty)$ に対して

有限次元半単純Lie環の表現論に於て 成立する条件を 次々課していく。

定義 L^e module Vが weight module であるとは $V = \bigoplus_{\lambda \in (\mathfrak{h}^e)^*} V_\lambda$ (直和)が 成立することを云う。

ここで $V_\lambda := \{ v \in V ;\ \mathrm{ad}h \cdot v = \lambda(h) v \ \ {}^\forall h \in \mathfrak{h}^e \}$である。

さて $\mathfrak{n} := \sum_{\alpha \in \Delta^+} L^\alpha$ とおき L^eの universal enveloping algebraを $U(L^e)$とおく。このとき

定義 weight module Vが 次の条件を満すとき Vを highest weight module (以下 h.w.mと略記)と云う。

或る $\lambda \in (\mathfrak{h}^e)^*$と 或る $x \in V_\lambda$ が存在して

$$\mathfrak{n} x = 0 \qquad U(L^e) x = V.$$

この時 $\dim V_\lambda = 1$ で xは scalar倍を除いて確定する。このλを h.w.m V の highest weight, xを h.w.m Vの highest weight vectorと云う。

さらに Poincaré-Birkoff-Wittの定理より Vの任意のweight μは $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$, 但し $n_i \geqq 0$ for ${}^\forall i = 1, 2, \cdots l$ と書け $\dim V_\mu < \infty$ が成立する。

しかしながら これだけでは まだ 条件不足で Vが有限次元のときには trivialに成立する条件をつける。

定義 L^e module Vが standard module とは 次の二条件を満すとき云う。

i) V は highest weight vector x を持つ h.w.m

ii) 任意の $i=1,2,\cdots,l$ に対して 或る $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ が存在して

$$f_i^n=0 \quad i=1,2,\cdots,l.$$

上の ii) の条件から V は $sl(2,\mathbb{C})$ に同型な L^e の部分環 $S_i:=\mathbb{C}e_i+\mathbb{C}h_i+\mathbb{C}f_i$ の下で 有限次元既約 S_i module の直和に分解する。そしてこのことが 議論を円滑に進める推進力となるのである。以下 standard module が Kac-Moody Lie 環の表現論を考える舞台となる。

特に 上のことから V を standard module, μ をその weight とすると $\forall w\in W$ (Weyl 群) に対して $\dim V_\mu=\dim V_{w(\mu)}$ が成立する。

このとき §0 の Elie Cartan の定理 4°) は次の形で成立する。がその前に dominant integral weight の定義を与えておく。

定義 $\mu\in(\mathfrak{h}^e)^*$ が dominant integral weight とは $\mu(h_i)\in\mathbb{Z}$, $\mu(h_i)\geqq 0$ $\forall i=1,2,\cdots,l$ が成立するとき 云う。

今 P を "全ての dominant integral weight の集合" とすると §0 の Elie Cartan の定理は

定理

既約な standard module の同値類と P の元とは 1:1 onto に対応する。この対応は standard module に対して その

highest weightを 対応させることにより与えられる。

さて Weylの指標公式，及び分母公式の拡張を行う。
今 Vを weight moduleで 各weight spaceは 有限次元とする。その時 formal character $\chi(V)$を

$$\chi(V) := \sum_{\mu\in(\mathfrak{h}^e)^*} (\dim V_\mu)\, e^{\mu}$$

で 定義する。$\chi(V)$は $(\mathfrak{h}^e)^*$の元の形式的整係数一次結合(無限和)全体のなす加群Bの元である。

Bは $(\mathfrak{h}^e)^*$ の群環も含み，ℓ変数形式的巾級数環A
$A := \mathbb{Z}[[e^{-\alpha_1}, e^{-\alpha_2}, \cdots, e^{-\alpha_\ell}]]$ をも含む。(Aの元は
$e^{-(n_1\alpha_1+\cdots+n_\ell\alpha_\ell)}$ $n_i\geq 0, n_i\in\mathbb{Z}$，の形式的一次結合になり その積は $(\sum x_\gamma e^{-\gamma})(\sum y_\varepsilon e^{-\varepsilon}) = \sum z_\omega e^{-\omega}$，但し
$z_\omega = \sum x_\gamma y_{\omega-\gamma}$ (有限和) で定義される。)

今 dominant integral weight $\mu\in P$を highest weightに持つ standard L^e module Vに対しては $e^{-\mu}\chi(V)\in A$が成立する。そこで 古典論の時に 正ルートの和の半分に当る $\rho\in(\mathfrak{h}^e)^*$ を導入する。$\forall i=1,2,\cdots,\ell$ に対して $\rho(h_i)=1$ となる $\rho\in(\mathfrak{h}^e)^*$を一つとり固定する。この時 Kac-Moody Lie環に於ても 有限次元の場合と同様に $\rho - w\rho = -\langle\Phi_w\rangle$ が 成立する。但し $\Phi_w = \Delta^+\cap w(\Delta^-)$ で $\langle\Phi_w\rangle$は Φ_wの元の和，即ち $\langle\Phi_w\rangle = \sum_{\alpha\in\Phi_w}\alpha$ である。

このとき §0の Weylの指標公式の分子，分母に当る式，

$$N(\mu)=\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w(\mu+\rho)-(\mu+\rho)} \qquad 及び$$

$$D=\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w\rho-\rho}$$

を Kac-Moody Lie 環に於ても同じ式で定義すると D 及び $N(\mu)$ は A の元になる。実際 $D\in A$ は $w\rho-\rho=-\langle\Phi_w\rangle$ より明らかで $N(\mu)\in A$ は $\mu+\rho$ が dominant integral weight になり $\mu+\rho$ を highest weight とする standard module V_1 を考えれば $w(\mu+\rho)$ も V_1 の weight になり 従って

$\mu+\rho-w(\mu+\rho)=\sum_{i=1}^{\ell}n_i\alpha_i \quad n_i\in\mathbb{Z},\ n_i\geqq 0$ が成立するからである。(A 及び $N(\mu)$ が well defined であることは μ が dominant integral weight の時, $\rho-w\rho=\langle\Phi_w\rangle$, $\ell(w)=\#|\Phi_w|$ より

$w(\mu+\rho)=\mu+\rho$ ならば $w=1$ が成立することから従う。)

特に D は A の可逆元である。そこで Kac-Moody Lie 環 L と, L の standard module V に対して Weyl の指標公式

$$e^{-\mu}\chi(V)=\frac{N(\mu)}{D}=\frac{\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w(\rho+\mu)-(\rho+\mu)}}{\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w\rho-\rho}}$$

が A 中で成立することを期待したいが残念ながら今のところ一般の G.C.M から構成された Kac-Moody Lie 環に対しては Conjecture に過ぎない。

定義 G.C.M C が"対称化可能"とは 正の有理数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_\ell$ を対角成分にもつ対角行列 Λ が存在して ΛC が対称行列になることを云う。

例えば Euclidean typeの G.C.Mは 全て対称化可能である
し, tree型の Dynkin diagramを持つ G.C.Mは全て対称化可能である。そこで Weylの指標公式は

定理 (Kac [3])

対称化可能な G.C.Mから構成された Kac-Moody Lie 環Lと highest weight μをもつ standard L^e module Vに対して

$$(3.1) \quad e^{-\mu}\chi(V) = \frac{N(\mu)}{D} = \frac{\sum_{w\in W}(\det w)e^{w(\mu+\rho)-(\mu+\rho)}}{\sum_{w\in W}(\det w)e^{w\rho-\rho}}$$

が Aに於て 成立する。

Weylの分母公式については

定理

対称化可能な G.C.Mから構成された Kac-Moody Lie環 Lに対して

$$(3.2) \quad D = \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim L^\alpha}$$

が成立する。

特に 上の分母公式を Lが Euclidean typeの時に 書き下したものが Macdonald Identityである。

G.C.Mが対称化可能な時には L^e上に Killing form に似た不変な内積が入り それが 議論を円滑に推し進めるのである。この (3.1) 及び (3.2)を用いて 古典的関数等式を 出すには (3.1) 及び (3.2)の両辺に

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{Z}[[q]] \\ \cup & & \cup \\ e^{-\alpha_i} & \longmapsto & q^{s_i} \quad i=1,2,\cdots,l \end{array}$$

但し $\mathbb{Z}[[q]]$は一変数形式的巾級数環，

$(s_1,\cdots,s_l)$ は 非負整数のl個の組，という homomorphism を 施せばよい。これを $(s_1,\cdots s_l)$型の q特殊化と云う。

例えば $A_{1,1}$型の Euclidean Lie環の分母公式に うまい特殊化を施してやると Jacobi の triple product identity が出てくる。

文献表

[1] 岩堀長慶「線型不等式とその応用」 岩波講座 基礎数学 8

[2] J. Lepowsky "Lectures on Kac-Moody Lie algebra" Paris VI 1978

[3] V. Kac "Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth" Izv Akad Nauk SSSR, 32, 1968 PP 1323～1367

[4] V. Kac "Infinite dimensional Lie algebras, Dedekind's η-function, Classical Möbius function---" Adv. Math 30, 1978 PP 85～136

[5] I. Macdonald "Affine root systems and Dedekind's η-function" Inventiones Math 15 1972 PP 91～143

[6] R. Moody "A New class of Lie algebra" J. Alg 10 1968 PP 211－230

[7] R. Moody "Euclidean Lie algebras" Canad. J. Math 21 1969 PP 1432－1454

[8] R. Moody "Macdonald Identities and Euclidean Lie algebras"

Proc A.M.S 48 1975 pp43~52

[9] Moody-Teo "Tits' System with crystallographic Weyl groups" J. Alg 21, 1972 pp178~190